Proyecciones y simetrías

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y S_1 y S_2 dos subespacios suplementarios. Esto quiere decir que $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$ y por lo tanto, para todo $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$ tales que $v = v_1 + v_2$.
Se define la proyección sobre S_1 en la dirección S_2 como la transformación lineal $\Pi_{S_1S_2} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que

$$\Pi_{S_1S_2}(v) = v_1 \quad si \quad v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in S_1, v_2 \in S_2$$

Observemos que

$$Nu(\Pi_{S_1S_2}) = S_2 \quad e \quad Im(\Pi_{S_1S_2}) = S_1$$

Podemos ver que

$$\Pi_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & v \in S_1 \\ 0 & v \in S_2 \end{cases}$$

Ejercicio 1. Sean $S_1 = \{(x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 /\ x + y + z = 0\}$ y $S_2 = gen\{(1\ 2\ -1)^T\}$ subespacios de $\mathbb{R}^3$.

1. Verificar que $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.

2. Definir la proyección sobre S_1 en la dirección de S_2 y hallar su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. Definir la proyección sobre S_2 en la dirección de S_1 y hallar su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

1. Una base de S_1 es $B_{S_1} = \{(1\ 0\ -1)^T, (0\ 1\ -1)^T\}$. Entonces

$$S_1 + S_2 = gen\{(1\ 0\ -1)^T, (0\ 1\ -1)^T, (1\ 2\ -1)^T\}$$

Vamos a chequear que el conjunto $B = \{(1\ 0\ -1)^T, (0\ 1\ -1)^T, (1\ 2\ -1)^T\}$ es LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces el conjunto B es una base de $S_1 + S_2$ (genera y es LI). La dimensión de $S_1 + S_2$ es 3 y $S_1 + S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$. Por el teorema de la dimensión tenemos que $dim(S_1 \cap S_2) = 0$, así que la suma es directa.

2. Vamos a definir la proyección sobre S_1 en la dirección de S_2 sobre la base B del siguiente modo:

$$\begin{cases} \Pi_{S_1S_2}(1\ 0\ -1) = (1\ 0\ -1) \\ \Pi_{S_1S_2}(0\ 1\ -1) = (0\ 1\ -1) \\ \Pi_{S_1S_2}(1\ 2\ -1) = (0\ 0\ 0) \end{cases}$$

Podemos armar las matrices en base B y de base B a base canónica E:

$$[\Pi_{S_1S_2}]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\Pi_{S_1S_2}]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en base canónica necesitamos multiplicar por un cambio de base:

$$[\Pi_{S_1S_2}]_E^E = [\Pi_{S_1S_2}]_B^E M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Para definir la proyección sobre S_2 en la dirección de S_1 repetimos lo que hicimos en el item anterior. Primero la definimos sobre la base B del siguiente modo:

$$\begin{cases} \Pi_{S_2S_1}(1\ 0\ -1) = (0\ 0\ 0) \\ \Pi_{S_2S_1}(0\ 1\ -1) = (0\ 0\ 0) \\ \Pi_{S_2S_1}(1\ 2\ -1) = (1\ 2\ -1) \end{cases}$$

Podemos armar las matrices en base B y de base B a base canónica E:

$$[\Pi_{S_2S_1}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\Pi_{S_2S_1}]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en base canónica necesitamos multiplicar por un cambio de base:

$$[\Pi_{S_2S_1}]_E^E = [\Pi_{S_2S_1}]_B^E M_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación 1. La proyección sobre S_1 en dirección de S_2 verifica que

$$\Pi_{S_1S_2}^2 = \Pi_{S_1S_2}$$

Podemos ver que vale la recíproca:

Proposición 0.0.1. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ verifica que $T^2 = T$ entonces T es la proyección sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$.

Para la demostración necesitamos probar las siguientes afirmaciones.

1. Si $T^2 = T$ entonces $T(w) = w$ para todo $w \in Im(T)$.

   Dem: Supongamos que $w \in Im(T)$, entonces existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $T(v) = w$. Luego

   $$T(w) = T(T(v)) = T(v) = w$$

2. $Nu(T) \oplus Im(T) = \mathbb{V}$

   Dem: Veamos que $Nu(T) \cap Im(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$

   Sea $v \in Nu(T) \cap Im(T)$. Tenemos por un lado que $T(v) = 0_{\mathbb{V}}$ y por otro lado, como $v \in Im(T)$, vimos que $T(v) = v$. Luego $v = 0_{\mathbb{V}}$.

   Por el teorema de la dimensión

   $$dim(Nu(T) + Im(T)) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T)) - dim(Nu(T) \cap Im(T)) = dim(\mathbb{V})$$

   Entonces

   $$Nu(T) + Im(T) = \mathbb{V}$$

La transformación T verifica entonces que

$$T(v) = \begin{cases} v & v \in Im(T) \\ 0_{\mathbb{V}} & v \in Nu(T) \end{cases}$$

Por lo tanto es la proyección sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$.

Ejercicio 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x\ y\ z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Probar que es una proyección y encontrar una base B tal que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para probar que T es una proyección alcanza con ver que $T^2 = T$. Lo podemos ver en forma matricial. Notemos que

$$[T]_E^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación de matrices podemos comprobar que

$$([T]_E^E)^2 = [T]_E^E$$

Entonces T es la proyección sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$.
En este caso

$$Im(T) = gen\{(1\ 1\ 1)^T\} \quad y \quad Nu(T) = \{(x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 / -2x - 3y + 7z = 0\} = gen\{(7\ 0\ 2)^T, (0\ 7\ 3)^T\}$$

Observemos que buscamos una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$\begin{cases} T(v_1) = v_1 \\ T(v_2) = (0\ 0\ 0)^T \\ T(v_3) = (0\ 0\ 0)^T \end{cases}$$

Esto es,

$$v_1 \in Im(T), \quad v_2 \in Nu(T), \quad v_3 \in Nu(T)$$

Por ejemplo,

$$B = \{(1\ 1\ 1)^T, (7\ 0\ 2)^T, (0\ 7\ 3)^T\}$$

Definamos ahora las simetrías. Como antes, consideremos $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y S_1 y S_2 dos subespacios suplementarios ($S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$)
Se define la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a S_1 en la dirección S_2 como la transformación lineal $\Sigma_{S_1S_2} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que

$$\Sigma_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & v \in S_1 \\ -v & v \in S_2 \end{cases}$$

Puede verse que

$$\Sigma_{S_1S_2} = I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{S_2S_1}$$

ya que

- Si $v \in S_1$, tenemos que $\Pi_{S_2S_1}(v) = 0_{\mathbb{V}}$. Entonces $\Sigma_{S_1S_2}(v) = I_{\mathbb{V}}(v) - 2\Pi_{S_2S_1}(v) = v$
- Si $v \in S_2$, tenemos que $\Pi_{S_2S_1}(v) = v$. Entonces $\Sigma_{S_1S_2}(v) = I_{\mathbb{V}}(v) - 2\Pi_{S_2S_1}(v) = v - 2v = -v$

También puede verse fácilmente que

$$\Sigma_{S_1S_2}^2 = I_{\mathbb{V}}$$

Ejercicio 3. Sean $S_1 = \{(x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z=0\}$ y $S_2 = gen\{(1\ 2\ -1)^T\}$ subespacios de $\mathbb{R}^3$. Definir la simetría respecto a S_1 en la dirección de S_2 y hallar su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Notemos que S_1 y S_2 son los subespacios del ejercicio 1, así que ya sabemos que son complementarios. Vamos a definir la simetría respecto a S_1 en la dirección de S_2 sobre la base $B = \{(1\ 0\ -1)^T, (0\ 1\ -1)^T, (1\ 2\ -1)^T\}$ del siguiente modo:

$$\begin{cases} \Sigma_{S_1S_2}(1\ 0\ -1) = (1\ 0\ -1) \\ \Sigma_{S_1S_2}(0\ 1\ -1) = (0\ 1\ -1) \\ \Sigma_{S_1S_2}(1\ 2\ -1) = -(1\ 2\ -1) \end{cases}$$

Podemos armar las matrices en base B y de base B a base canónica E:

$$[\Sigma_{S_1S_2}]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\Sigma_{S_1S_2}]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en base canónica necesitamos multiplicar por un cambio de base:

$$[\Sigma_{S_1S_2}]_E^E = [\Sigma_{S_1S_2}]_B^E M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación 2. Si $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ verifica $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \dfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ verifica $T^2 = T$. Esto nos dice que S es la simetría respecto a $Nu(T) = Nu(\dfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ en la dirección de $Im(T) = Im(\dfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$.

Ejercicio 4. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$S(x\ y\ z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Probar que es una simetría y encontrar una base B tal que

$$[S]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que $[S]_E^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se puede verificar que

$$([S]_E^E)^2 = I$$

así que S es una simetría.
Buscamos una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$\begin{cases} S(v_1) = v_1 \\ S(v_2) = v_2 \\ S(v_3) = -v_3 \end{cases}$$

Para hallar estos vectores vamos a resolver los sistemas $[S]_E^E v = v$ y $[S]_E^E v = -v$.

El primer sistema es equivalente a $([S]_E^E - I)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 0$, $y, z \in \mathbb{R}$. Entonces podemos tomar, por ejemplo,

$$v_1 = (0\ 1\ 0)^T \quad y \quad v_2 = (0\ 0\ 1)^T$$

El segundo sistema es equivalente a $([S]_E^E + I)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = y = z$, $z \in \mathbb{R}$. Entonces podemos tomar, por ejemplo,

$$v_3 = (1\ 1\ 1)^T$$

Podemos tomar entonces la base

$$B = \{(0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 1)^T, (1\ 1\ 1)^T\}$$